KIT DE SURVIE

TERMINALE SPÉ MATHS

DÉNOMBREMENT&COMBINATOIRE

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE(1)

LIMITE D'UNE SUITE

Offert par visioscool

WWW.VISIOSCOOL.FR

MATHÉMATIQUES

Présentation

QUI SUIS-JE ?

Professeur de mathématiques de l'Education Nationale de 2000 à 2021. Ma pédagogie bienveillante mais exigeante, reconnue et appréciée de tous, s'est construite sur une expérience variée en terme de catégories d'enseignement mais aussi de missions confiées tout au long de sa carrière :

- Coordonnateur de mathématiques
- Professeur principal
- Porteur de projet (créateur d'une classe Sciences)
- Responsable du projet HPI (Hauts Potentiels Intellectuels)
- Conseiller pédagogique de professeurs stagiaires
- IREM (Institut de Recherche de l'Enseignement de Mathématiques)
- APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)
- Formation personnelle en neurosciences orientée vers l'enfance, chez Cogito'z
- Cours particuliers Collège - Lycée - Supérieur (depuis 25 ans)
- …

En 2021, j'ai décidé d'accentuer l'accompagnement INDIVIDUEL/COLLECTIF de tous ces élèves qui, quelque soit leur niveau, ont besoin, de façon ponctuelle ou plus fréquente, d'être rassurés et guidés dans un parcours scolaire qui peut parfois paraître déroutant.

Depuis j'interviens également auprès d'écoles prestigieuses et d'institut spécialisés :

- **Albert School** (école d'Ingénieurs et de Commerce spécialisée en Data&Business)

David Nowacki

★★★★★

DES COURS TRÈS CLAIRS ET BIEN ADAPTÉS À MES BESOINS. LES COURS ONT ÉTÉ EFFICACES ET M'ONT AIDÉ À AVOIR DE TRÈS BONNES NOTES. JE RECOMMANDE !! MERCI

ME CONTACTER

Téléphone : 06 60 93 62 39
Email : davidnowa@gmail.com

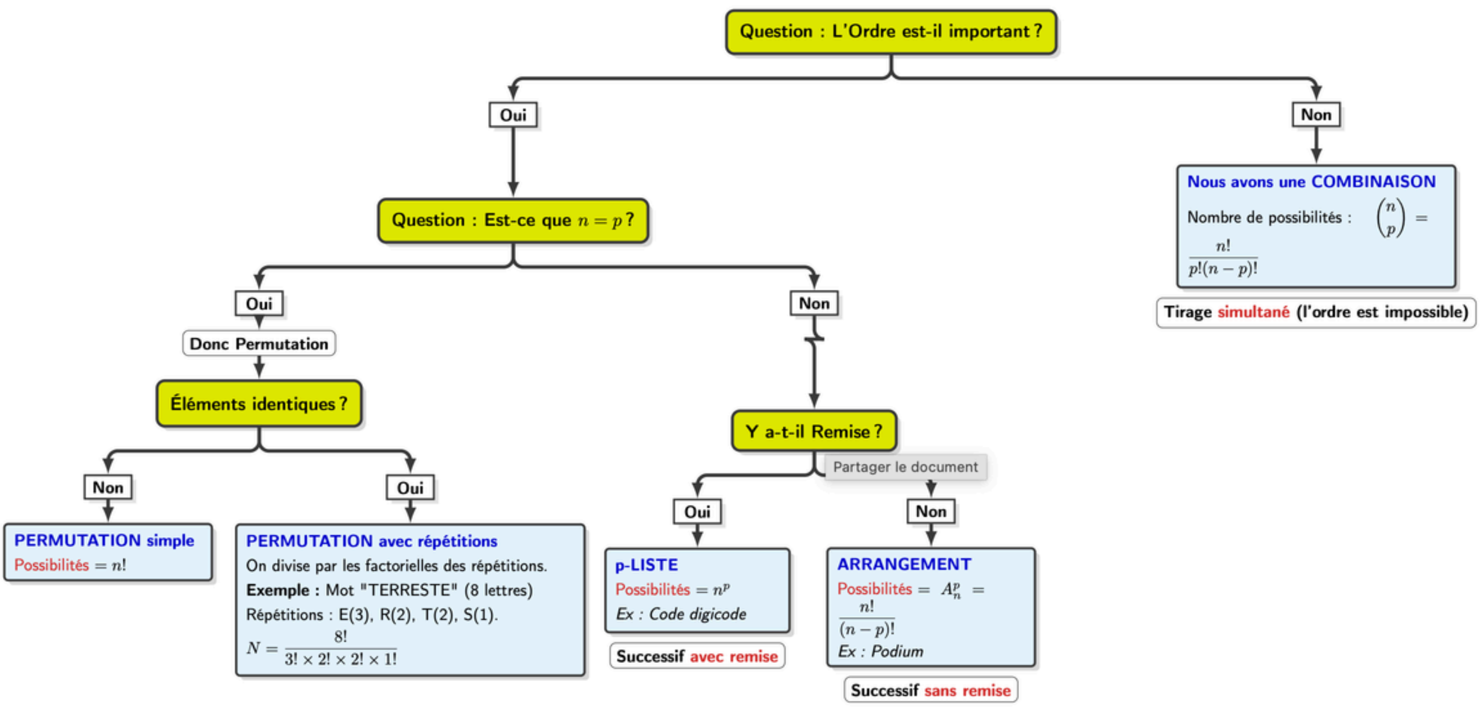
I. DÉNOMBREMENT&COMBINATOIRE

COURS

TERMINALE SPÉ MATHS

ANALYSE COMBINATOIRE : SCHÉMA DÉCISIONNEL

Contexte : On sélectionne p éléments parmi n.



1. Montrer que trois points sont alignés

Objectif : Prouver que A, B et C sont alignés.
Outil : La colinéarité des vecteurs.

1. Former les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Chercher un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.
3. **Avec coordonnées :** Vérifier si les coordonnées sont proportionnelles :

$$\frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = k$$

Rédaction type : "On constate que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés."

2. Montrer que quatre points sont coplanaires

Objectif : Prouver que A, B, C et D sont dans le même plan.
Outil : Décomposition vectorielle.

1. Choisir trois vecteurs formés par ces points, par exemple $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Chercher deux réels x et y tels que : $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Attention : Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, ils ne définissent pas un plan unique. Il faut préciser "$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires".

3. Déterminer une représentation paramétrique de droite

Objectif : Donner le système d'équations d'une droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.
Méthode : Soit $M(x;y;z) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ (avec $t \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = x_A + t \times a \\ y = y_A + t \times b \\ z = z_A + t \times c \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

4. Étudier la position relative de deux droites

Soient $\mathcal{D}_1$ (dirigée par $\vec{u}$) et $\mathcal{D}_2$ (dirigée par $\vec{v}$).

Étape 1 : Observer les vecteurs directeurs :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\to$ Les droites sont **parallèles**. (Vérifier si elles ont un point commun pour savoir si elles sont confondues ou strictement parallèles).
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas colinéaires** $\to$ Passer à l'étape 2.

Étape 2 : Chercher un point d'intersection : Résoudre le système formé par les représentations paramétriques (attention, utiliser deux paramètres différents, ex : t et t').

$$\begin{cases} x_A + at = x_B + a't' \\ y_A + bt = y_B + b't' \\ z_A + ct = z_B + c't' \end{cases}$$

- Si le système a une solution unique $(t;t')$ $\to$ Les droites sont **sécantes**.
- Si le système n'a pas de solution $\to$ Les droites sont **non coplanaires**.

5. Caractériser un plan (Représentation paramétrique)

Objectif : Décrire le plan $\mathcal{P}$ passant par A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Méthode : Soit $M(x;y;z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$. Cela donne un système à deux paramètres (t et t').

III. LIMITE D'UNE SUITE

EXERCICES CORRIGÉS

TERMINALE SPÉ MATHS

Exercice 1 : Limites directes

Déterminer la limite des suites suivantes quand $n \to +\infty$.

a) $u_n = 2n - 1$

b) $v_n = -3 + \dfrac{5}{n+4}$

↘ Solution

a. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$. Par somme avec une constante, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+4) = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n+4} = 0$. Par somme, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -3$.

Exercice 2 : Formes indéterminées (Polynômes)

Déterminer la limite des suites suivantes quand $n \to +\infty$.

a) $u_n = n + 3n^2 - n^3$

b) $v_n = \dfrac{n^3+2}{2n^2-1}$

↘ Solution

a. Il s'agit d'une forme indéterminée "$\infty - \infty$". On factorise par le terme de plus haut degré (n^3) :

$$u_n = n^3\left(\frac{n}{n^3} + \frac{3n^2}{n^3} - \frac{n^3}{n^3}\right) = n^3\left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} - 1\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n} - 1\right) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$, par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b. Il s'agit d'une FI "$\dfrac{\infty}{\infty}$". On factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur :

$$v_n = \frac{n^3(1+\frac{2}{n^3})}{n^2(2-\frac{1}{n^2})} = n \times \frac{1+\frac{2}{n^3}}{2-\frac{1}{n^2}}$$

La parenthèse tend vers $\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 3 : Formes indéterminées (Quotients)

Déterminer la limite des suites suivantes quand $n \to +\infty$.

a) $u_n = \dfrac{n^2 + 2n}{n+1}$ **b)** $v_n = \dfrac{3n + \sqrt{n}}{2n+3}$

↘ **Solution**

a. On factorise par le terme prépondérant en haut et en bas :

$$u_n = \frac{n^2(1+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = n \times \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

Le quotient tend vers $1/1 = 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on a par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. On factorise par n (le terme dominant) en haut et en bas :

$$v_n = \frac{n(3+\frac{\sqrt{n}}{n})}{n(2+\frac{3}{n})} = \frac{3+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2+\frac{3}{n}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$, par quotient on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 4 : Théorème de comparaison

Soit la suite (u_n) définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n - \sin(n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq -n + 1$
2. En déduire la limite de la suite (u_n) quand $n \to +\infty$.

↘ Solution

1. On sait que pour tout réel x, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Donc pour tout entier n, $\sin(n) \geq -1$. En multipliant par -1 (ce qui change le sens de l'inégalité), on a : $-\sin(n) \leq 1$. En ajoutant $-n$ de chaque côté, on obtient : $-n - \sin(n) \leq -n + 1$.
   Donc $u_n \leq -n + 1$.
2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n + 1) = -\infty$. D'après le **théorème de comparaison**, puisque u_n est inférieure ou égale à une suite qui tend vers $-\infty$, elle est "poussée" vers $-\infty$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 5 : Théorème des gendarmes

Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \geq 1$, $-3 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq -3 + \dfrac{1}{n^2 + 1}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) quand $n \to +\infty$.

↘ Solution

On calcule la limite des expressions encadrant u_n :

- À gauche : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-3 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = -3$.
- À droite : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + 1) = +\infty \implies \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2 + 1} = 0 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-3 + \dfrac{1}{n^2 + 1}\right) = -3$.

Les deux suites qui encadrent (u_n) convergent vers la même limite -3. D'après le **théorème des gendarmes**, la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$.

Exercices 6 et 7 : Suites géométriques et Monotonie

Ex 6 : Déterminer la limite quand $n \to +\infty$: a) (u_n) géométrique de raison 0,6 et $u_1 = -2$. b) $v_n = -4 \times 3^n$.
Ex 7 : $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$ avec $u_0 = 1,5$. On admet $1 < u_n < 2$. 1. Étudier les variations de (u_n). 2. En déduire que (u_n) converge.

↘ Solution

Exercice 6 :

a. La suite est géométrique de raison $q = 0,6$. Comme $-1 < 0,6 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. La suite comporte le terme 3^n. Comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. En multipliant par -4 (qui est négatif), on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exercice 7 :

1. Pour étudier les variations, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = (0,5u_n + 1) - u_n = -0,5u_n + 1$$

Or on sait que $u_n < 2$. En multipliant par $-0,5$ (qui est négatif), on a $-0,5u_n > -1$. En ajoutant 1, on obtient $-0,5u_n + 1 > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n > 0$. **La suite (u_n) est strictement croissante.**

2. La suite (u_n) est **croissante** et **majorée** par 2 (car $u_n < 2$). D'après le théorème de convergence monotone, **la suite (u_n) est convergente**.

Exercice 8 (Type BAC) : Modélisation et Suites auxiliaires

On note a_n la proportion papier et b_n la proportion numérique en $2010+n$. $a_0 = 1, b_0 = 0$. 10% des abonnés papier passent au numérique, 6% du numérique passent au papier. 1. Justifier que $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$. 2. En déduire que $a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$. 3. On définit $c_n = a_n - 0,375$. a) Montrer que (c_n) est géométrique. b) Exprimer c_n puis a_n en fonction de n. c) Déterminer la limite de (a_n). 4. À l'aide de la calculatrice, trouver l'année où le papier devient minoritaire.

↘ **Solution**

1. En 2010, tous les abonnés ont la version papier, donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Chaque année, la version papier conserve 90% de ses abonnés (10% partent), ce qui donne $0,9a_n$. Elle récupère aussi 6% des abonnés numériques, soit $0,06b_n$. Le total pour l'année suivante est donc : $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$.
2. Le nombre total d'abonnés est constant, la somme des proportions vaut 1, donc $a_n + b_n = 1$, ce qui implique $b_n = 1 - a_n$. On remplace b_n dans la relation précédente :

$$a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06(1 - a_n) = 0,9a_n + 0,06 - 0,06a_n = \mathbf{0,84a_n + 0,06}$$

3. **a)** On exprime c_{n+1} en fonction de c_n :

$$c_{n+1} = a_{n+1} - 0,375 = (0,84a_n + 0,06) - 0,375 = 0,84a_n - 0,315$$

On factorise par $0,84$ (le coefficient de a_n) :

$$c_{n+1} = 0,84\left(a_n - \frac{0,315}{0,84}\right) = 0,84(a_n - 0,375) = 0,84c_n$$

Pour tout n, $c_{n+1} = 0,84c_n$. **La suite (c_n) est donc géométrique de raison** $q = 0,84$. Son premier terme est $c_0 = a_0 - 0,375 = 1 - 0,375 = 0,625$.

b) D'après le cours sur les suites géométriques : $c_n = c_0 \times q^n \implies \mathbf{c_n = 0,625 \times 0,84^n}$.

c) Comme $c_n = a_n - 0,375$, on a $a_n = c_n + 0,375$. Donc $a_n = 0,625 \times 0,84^n + 0,375$. Et comme $b_n = 1 - a_n$, on obtient : $b_n = 1 - (0,625 \times 0,84^n + 0,375) \implies \mathbf{b_n = 0,625 - 0,625 \times 0,84^n}$.

d) Comme $-1 < 0,84 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,84^n = 0$. Par produit et somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0,375$. (À long terme, la version papier représentera 37,5% des abonnements).

4. On cherche l'année où la proportion papier est inférieure à la proportion numérique, c'est-à-dire :

$$a_n < b_n \iff a_n < 1 - a_n \iff 2a_n < 1 \iff a_n < 0,5$$

On entre la formule $a_n = 0,625 \times 0,84^n + 0,375$ dans la calculatrice et on regarde le tableau de valeurs :

— Pour $n = 9$: $a_9 \approx 0,505$ (donc $a_9 > 0,5$)

— Pour $n = 10$: $a_{10} \approx 0,484$ (donc $a_{10} < 0,5$)

C'est donc à partir de $n = 10$ que la condition est remplie. Comme l'année de base est $2010 + n$, cela correspond à l'année **2020**.

TERMINALE SPÉ MATHS

ET MAINTENANT...PRÊT(E) À TOUT DÉCHIRER AU BAC ?

FÉLICITATIONS D'AVOIR TÉLÉCHARGÉ ET CONSULTÉ CE **KIT DE SURVIE** !

SI VOUS AVEZ APPRÉCIÉ LA CLARTÉ DE CES 3 FICHES (**COURS - MÉTHODES - EXERCICES CORRIGÉS**), SACHEZ QU'ELLES NE SONT QUE LA PARTIE VISIBLE DE L'ICEBERG.

LA GÉOMÉTRIE, LA COMBINATOIRE ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SONT DES PILIERS DU PROGRAMME, MAIS LE BACCALAURÉAT EXIGE UNE MAÎTRISE TOTALE DE L'ENSEMBLE DES **14 CHAPITRES DE LA SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES**.

C'EST POURQUOI JE FINALISE ACTUELLEMENT LA FORMATION VIDÉO **"OBJECTIF BAC SPÉ MATHS"**.

DANS CE PROGRAMME COMPLET, NOUS REPRENDRONS ENSEMBLE, **PAS À PAS ET EN VIDÉO**, ABSOLUMENT TOUT CE QU'IL FAUT SAVOIR, COMPRENDRE ET RÉDIGER POUR EXCELLER LE JOUR J.

VOTRE MISSION POUR LES PROCHAINS JOURS :

- **IMPRIMEZ** CES FICHES ET GLISSEZ-LES DANS VOTRE CLASSEUR.
- SURVEILLEZ ATTENTIVEMENT **VOTRE BOÎTE DE RÉCEPTION E-MAIL**. VOUS FEREZ PARTIE DES TOUTES PREMIÈRES PERSONNES AVERTIES DE L'OUVERTURE DES INSCRIPTIONS DE LA FORMATION COMPLÈTE.

UN TARIF TRÈS PRIVILÉGIÉ SERA RÉSERVÉ AUX INSCRITS DE CETTE LISTE D'ATTENTE LORS DU LANCEMENT OFFICIEL.

EN ATTENDANT, N'HÉSITEZ PAS À ME RETROUVER ET À ME POSER VOS QUESTIONS SUR MES RÉSEAUX

À TRÈS VITE POUR LA SUITE DES RÉVISIONS,

DAVID

TERMINALE SPÉ MATHS

AVIS

★★★★★

APRÈS CES PREMIERS COURS DE MATHÉMATIQUES AVEC MON PROFESSEUR DAVID NOWACKI, JE VOULAIS FAIRE UN PREMIER FEEDBACK QUI EST BIEN POSITIF ! LE COURS EST TRÈS CLAIR ET BIEN ENSEIGNÉ AINSI QU'ENCADRÉ, LE RYTHME DU COURS EST ADAPTÉ A LA COMPRÉHENSION DE TOUS AVEC SUFFISAMMENT D'EXPLICATIONS ET D'AIDE DU PROFESSEUR POUR COMPRENDRE ET AVANCER . JE VOUS REMERCIE POUR CES COURS !

★★★★★

LE PROFESSEUR EXPLIQUE LES CONCEPTS DE MANIÈRE CLAIRE ET PREND LE TEMPS DE RÉPONDRE AUX QUESTIONS POUR S'ASSURER QUE TOUT LE MONDE COMPREND. IL UTILISE AUSSI DES EXEMPLES CONCRETS QUI RENDENT LES MATHÉMATIQUES PLUS ACCESSIBLES ET INTERESSANTES.

★★★★★

JE TROUVE QUE LE PROFESSEUR EST À L'ECOUTE DES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ ET EXPLIQUE VRAIMENT BIEN !

★★★★★

J'AIME L'ORGANISATION ET LE DÉROULEMENT DU COURS

★★★★★

LA PÉDAGOGIE EST TRÈS CLAIRE ET CHALLENGEANTE...