Suites & récurrence - David Nowacki

Terminale Spé Maths

Durée indicative : 15–25 min par exercice (Ex.5 : 35–50 min).

Exercice 1 — Égalité à démontrer

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = 2\,u_n + 1 \quad (n \geq 0).$$

Consigne : Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 2 — Égalité à démontrer

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$v_0 = 2, \qquad v_{n+1} = 3\,v_n + 4 \quad (n \geq 0).$$

Consigne : Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$v_n = 4 \cdot 3^n - 2.$$

Exercice 3 — Inégalité par récurrence

Soit $(w_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$w_0 = 8, \qquad w_{n+1} = \tfrac{2}{5}\,w_n + 3 \quad (n \geq 0).$$

1. Calculer w_1.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $w_n \geq 5$.

Exercice 4 — Inégalité avec racine carrée

Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$y_0 = 4, \qquad y_{n+1} = \sqrt{y_n + 6} \quad (n \geq 0).$$

1. Calculer y_1.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $y_n \geq 3$.

Exercice 5 — Type BAC : arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = 8, \qquad u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 4 \quad (n \geq 0).$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Formuler brièvement une conjecture sur le sens de variation de (u_n) et sur sa limite.
3. Déterminer la limite candidate L en résolvant $L = 0{,}6L + 4$.
4. Poser $v_n = L - u_n$ et :
   (a) Montrer que $v_{n+1} = 0{,}6\,v_n$.
   (b) En déduire l'expression explicite de u_n.
5. Montrer rigoureusement que (u_n) est monotone et bornée ; conclure sur la convergence par le théorème de convergence monotone.