Corrections — Suites & récurrence

Terminale Spé Maths

Remarque : ces corrections sont détaillées pour un travail autonome. Respectez la structure d'une démonstration par récurrence : initialisation — hypothèse — hérédité — conclusion.

Correction – Exercice 1

Objectif. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^{n+1} - 1,$$

où (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1) Initialisation. Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et $2^{0+1} - 1 = 1$. La propriété est vraie au rang 0.

2) Hypothèse de récurrence. Supposons que pour un certain $k \geq 0$ on ait $u_k = 2^{k+1} - 1$.

3) Hérédité. Alors

$$u_{k+1} = 2u_k + 1 = 2\left(2^{k+1} - 1\right) + 1 = 2^{k+2} - 1,$$

donc la propriété est vraie au rang $k + 1$.

4) Conclusion. Par récurrence, $u_n = 2^{n+1} - 1$ pour tout $n \geq 0$.

Correction – Exercice 2

Objectif. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 4 \cdot 3^n - 2,$$

où (v_n) est définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 3v_n + 4$.

1) Initialisation. Pour $n = 0$: $v_0 = 2$ et $4 \cdot 3^0 - 2 = 2$. Vrai.

2) Hypothèse. Supposons $v_k = 4 \cdot 3^k - 2$.

3) Hérédité. Alors

$$v_{k+1} = 3v_k + 4 = 3\left(4 \cdot 3^k - 2\right) + 4 = 4 \cdot 3^{k+1} - 2.$$

4) Conclusion. Par récurrence, la formule est vraie pour tout n.

Correction – Exercice 3

Objectif. Montrer que $w_n \geq 5$ pour tout $n \geq 0$, où $w_0 = 8$ et $w_{n+1} = \frac{2}{5}w_n + 3$.

1) Calcul. $w_1 = \frac{2}{5} \cdot 8 + 3 = \frac{31}{5} = 6{,}2$.

2) Initialisation. $w_0 = 8 \geq 5$.

3) Hypothèse. Supposons $w_k \geq 5$.

4) Hérédité. Alors

$$w_{k+1} = \frac{2}{5}w_k + 3 \geq \frac{2}{5} \cdot 5 + 3 = 5.$$

5) Conclusion. Par récurrence, $w_n \geq 5$ pour tout n.

Correction – Exercice 4

Objectif. Montrer que $y_n \geq 3$ pour tout $n \geq 0$, où $y_0 = 4$ et $y_{n+1} = \sqrt{y_n + 6}$.

1) Calcul. $y_1 = \sqrt{4+6} = \sqrt{10} \approx 3{,}162 > 3$.

2) Initialisation. $y_0 = 4 \geq 3$.

3) Hypothèse. Supposons $y_k \geq 3$.

4) Hérédité. La racine carrée est croissante sur $[0, +\infty)$, donc

$$y_{k+1} = \sqrt{y_k + 6} \geq \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3.$$

5) Conclusion. Par récurrence, $y_n \geq 3$ pour tout n.

Correction – Exercice 5

Objectif. Étudier (u_n) définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 4$: calculs, forme explicite, monotonie, majorants, limite.

1) Premiers termes.

$$u_1 = 0{,}6 \cdot 8 + 4 = 8{,}8, \quad u_2 = 0{,}6 \cdot 8{,}8 + 4 = 9{,}28, \quad u_3 = 0{,}6 \cdot 9{,}28 + 4 = 9{,}568.$$

La suite semble croissante et se rapprocher de 10.

2) Limite candidate. Si $\lim u_n = L$, alors $L = 0{,}6L + 4$, d'où $L = 10$.

3) Suite auxiliaire. Posons $v_n = 10 - u_n$. Alors

$$v_{n+1} = 10 - u_{n+1} = 10 - (0{,}6u_n + 4) = 0{,}6(10 - u_n) = 0{,}6\,v_n.$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $0{,}6$ et $v_0 = 10 - 8 = 2$.

4) Expression explicite. $v_n = 2 \cdot 0{,}6^n$, donc

$$u_n = 10 - 2 \cdot 0{,}6^n \qquad (\forall n \geq 0).$$

5) Monotonie. On calcule

$$u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 0{,}6^n(1 - 0{,}6) = 0{,}8 \cdot 0{,}6^{\,n} > 0,$$

donc (u_n) est strictement croissante.

6) Comme $v_n > 0$, $u_n = 10 - v_n < 10$ pour tout n ; ainsi (u_n) est croissante et majorée par 10.

7) Conclusion. Par le théorème (suite monotone et bornée), (u_n) converge et $\lim u_n = 10$.