Raisonnement par récurrence — Fiche méthode

Court, pratique et prêt à utiliser en contrôle / bac.

3 conseils à suivre

1. **Soigne l'initialisation.** Toujours vérifier explicitement que $P(n_0)$ est vraie (ne la sautez jamais).
2. **Rédige l'hérédité étape par étape.** Supposer $P(k)$ vraie (avec $k \geq n_0$), expliciter exactement ce que l'on sait, puis enchaîner les transformations qui mènent à $P(k+1)$. Évite les sauts logiques : chaque implication doit être justifiée.
3. **Conclue proprement et commente.** Énonce la conclusion $\forall n \geq n_0,\ P(n)$

Modèle-type

Démonstration par récurrence sur $n \geq n_0$.

1. **Initialisation.** Vérifier que $P(n_0)$ est vraie.
   Exemple : calcul ou observation directe montrant $P(n_0)$.
2. **Hérédité.** Soit $k \geq n_0$. Supposons $P(k)$ vraie (hypothèse de récurrence).
   À partir de $P(k)$, effectuez une suite d'implications claires et justifiées pour obtenir $P(k+1)$.
3. **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que $\forall n \geq n_0,\ P(n)$ est vraie.
   (Optionnel) Vérification rapide ou remarque sur l'interprétation du résultat.

Exemple classique : somme des n premiers entiers

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S(n) \;=\; 1 + 2 + \cdots + n \;=\; \frac{n(n+1)}{2}.$$

Preuve.

1. **Initialisation.** Pour $n = 1$, $S(1) = 1$ et $\dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Donc $P(1)$ vraie.
2. **Hérédité.** Soit $k \geq 1$. Supposons que $S(k) = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Alors

   $$S(k+1) = S(k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

   ce qui est $\dfrac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}$, donc $P(k+1)$ vraie.
3. **Conclusion.** Par récurrence, $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

Conseil bonus erreurs courantes

- **Ne pas confondre hypothèse et conclusion** : écris explicitement « Supposons $P(k)$ vraie » puis utilise cette hypothèse.
- **En contrôle**, signalez toujours les conditions (ex. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$) et terminez par une phrase de conclusion claire.

Mini-checklist à coller dans ta copie

- Initialisation écrite et vérifiée.
- Hypothèse $P(k)$ explicitée.
- Transition logique $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ écrite pas-à-pas.
- Conclusion claire : $\forall n \geq n_0,\ P(n)$.

Pour aller plus loin : entraine-toi sur des récurrences linéaires (ex. $u_{n+1} = au_n + b$), sur des inégalités (montrer bornes par récurrence) et sur l'emploi de suites auxiliaires (majorantes/minorantes).